数学Ａ 例題集

＜微積分＞

１．２変数関数

$$f(x,y)=x^3-y^3-3x+3y$$

を考え，この f について，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる点を (a,b) とする．

以下の問いに答えよ．

（１）$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

（２）点 (a,b) を求めよ．さらに点 (a,b) での $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ の値を求めよ．

（３）点 (a,b) 周りで $f(x,y)$ をテイラー展開し，２次の項までで近似した式を求めよ．

（４）問（３）で求めた式を利用して，f の極大点，極小点，鞍点を求めよ．

２．２変数関数 $f(x,y)$ を考え，この f について，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる点を (a,b) とする．

以下の問いに答えよ．

（１）点 (a,b) 周りで $f(x,y)$ をテイラー展開し，２次の項までで近似した式を以下のように変形した場合の２×２の行列 $[H]$ を求めよ．

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix}[H]\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

（２）問（１）で求めた行列 $[H]$ の固有値が異なる場合を考え，固有値を λ_1,λ_2，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ する．このとき，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}^T$$

の形となることを示せ．ただし，固有ベクトルの大きさは１とする．

（3）問（2）の関係式を利用して，

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

の形となることを示し，さらに，点(a,b)が極大点となるためのλ_1および λ_2の条件を求めよ.

（4） $f(x,y)=x^4-2x^2y^2-y^4-2x^2+2y^2$を考える．この$f$の極大点を求めよ.

＜線形代数＞

１．２×２の行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

（1）行列$\boldsymbol{A}$の固有値と，固有ベクトルを求めよ.

（2）行列$\boldsymbol{D}$を２×２の対角行列，行列$\boldsymbol{P}$を２×２の行列とする． $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$となる行列$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{P}$を示せ.

（3） $\boldsymbol{A}^n$を求めよ.

２．３×３の行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

（1）行列$\boldsymbol{A}$の固有値と固有ベクトルを求めよ.

（2）行列$\boldsymbol{D}$を３×３の対角行列，行列$\boldsymbol{P}$を３×３の行列とする． $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$となる行列$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{P}$を求めよ.

（3） $\boldsymbol{A}^n$を求めよ.

３．３×３の行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．

（１）行列 $\boldsymbol{A}$ の３つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは１とする．

（２）行列 $\boldsymbol{D}$ を３×３の対角行列，行列 $\boldsymbol{P}$ を３×３の行列とする．問（１）の結果を利用して $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$ となる行列 $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

（３）$\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．

＜ベクトル解析＞

１．３次元デカルト座標系 (x, y, z) で，

領域: $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$

平面: $S=\{(x,y,z)\,|\,x+z=1\}$

を考え，領域 D 内にある平面 S の部分を S_D とする．また，ベクトル

$$\boldsymbol{A}=(-y, x-z, y)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

（１）$\nabla\times\boldsymbol{A}$ を計算せよ．

（２）平面 S の原点からの距離を求めよ．

（３）S_D の形状と面積を求めよ．

（４）$\int_{S_D}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで、その z 成分は非負とする．さらに，ストークスの定理より $\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，C は S_D の周回である．

（５）$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を直接求めよ．C は問（４）と同じ S_D の周回である．

２． ３次元デカルト座標系(x,y,z)で，ベクトル

$$\boldsymbol{A}=(x-y+y^2+z^2,\ y-z+x^2+z^2,\ -x+z+x^2+y^2+2y(-x+z))$$

を考える．また，領域$D=\{(x,y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1\}$を考える．以下の問いに答えよ．

（１） $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$， $\nabla\times\boldsymbol{A}$を計算せよ．

（２）領域Dを図示せよ．

（３）領域Dの部分にある，平面 $x+z=1$をSとする． Sの面積とその形状を求めよ．

（４） $\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算せよ．ただし， Sは問（３）で求めたSであり， $\boldsymbol{n}$はSの単位法線ベクトルで、そのz成分は非負とする．

（５） $\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただしCは問（３）で求めたSの周回である．

３． ３次元デカルト座標系において，曲面

$$S=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 1\}$$

を考え，点$p\,(x,y,z)$はこの曲面上にあるものとし、点p の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$とする．

また， $u=x, v=y$とする．以下の問いに答えよ．

（１） zをuとvで表し，さらに点p における２つのベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$， および， $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ．

（２）問（１）の結果を利用して，曲面S上の単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$のz成分は正とする．

（３）以下の式を用いて曲面Sの面積を求める．

$$\int_S dS=\int_{S^*} f(u,v)\,du\,dv$$

このときの積分範囲S^*を図示せよ．また， $f(u,v)$を求めて積分値を計算せよ．