和

令和４年度 秋季募集
(令和５年４月入学)

# 東北大学大学院工学研究科
# 量子エネルギー工学専攻入学試験

# 試験問題冊子

数学Ａ　MATHEMATICS A

令和 4 年 8 月 30 日(火) 10:00 － 11:30

注　意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題を解答すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

# 数 学 A　MATHEMATICS A

１．次の積分を求めよ．

（１）$\displaystyle \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

（２）$\displaystyle \iint_D \frac{x^3}{y^2}\, dx\,dy$ ， $D=\{(x,y)\,|\,x^4 \le y \le x,\ \frac{1}{2} \le x \le 1\}$

（３）$\displaystyle \iint_D \exp(\cos(x))\, dx\,dy$ ， $D=\{(x,y)\,|\,\sin^{-1} y \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1\}$

2．図 1 に示すように，三次元デカルト座標系 $(x, y, z)$ の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，三次元極座標系 $(r, \theta, \phi)$ の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ とする．ただし，基本ベクトルの大きさは 1 である．ベクトル $\boldsymbol{A}$ が三次元デカルト座標系において，

$$\boldsymbol{A} = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{i} + y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{j} + z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{k}$$

により与えられる．また $S$ を次の領域

$$V = \{(x,y,z) \mid a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2,\ z \ge 0\}$$

の表面とする．ただし，$a$，$b$ は $0 < a < b$ を満たす実数である．

（1）$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を三次元デカルト座標系で求めよ．

（2）$x$，$y$，$z$ を $r$，$\theta$，$\phi$ を用いて表せ．

（3）三次元デカルト座標系から三次元極座標系へ座標変換する際のヤコビアンを求めよ．

（4）面積分 $\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $S$ の外向き単位法線ベクトルである．

（5）$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ を $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，$\theta$ および $\phi$ を用いて表せ．

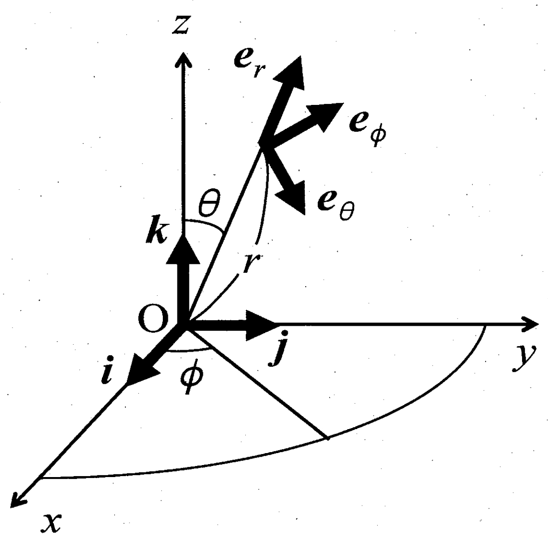


図 1

３．２変数関数

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2\alpha xy$$

を考える．ただし，$\alpha$は正の定数で，$0 < \alpha < 2$とする．以下の問いに答えよ．

（１）$f(x,y)$を以下のように書き換えた際の対称行列$\boldsymbol{A}$を求めよ．

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

（２）問（１）で求めた行列$\boldsymbol{A}$の２つ固有値$\lambda_1, \lambda_2\ (\lambda_1 > \lambda_2)$と，それぞれの固有値に対する固有ベクトル$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$を求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは１とし，

$$\det(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2) = 1$$

とする．

（３）問（２）で得られた結果を利用して，次式を示せ．

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

（４）問（３）で与えられている式を利用して，$f(x,y) = 1$で表される曲線の形状が$\alpha$の値でどのように変化するかを説明せよ．